

学生番号_____氏名_____

$x = -\ell$ から $x = \ell$ まで積分してみる

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) + \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right\} dx$$

普通に $m \neq n$ のときは

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$m = n$ のときは、 $\cos(0) = 1$ だから、これを積分して

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right\} dx$$

普通に $m \neq n$ のときは

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) - \frac{\ell}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$m = n$ のときは、

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) - \frac{\ell}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) - \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right\} dx$$

普通に $m \neq n$ のときは

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\ell}{(m-n)\pi} \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{(m+n)\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$m = n$ のときは、

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\ell}{(m-n)\pi} \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{(m+n)\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{\ell}\right) \right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$\therefore \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ や $\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ は、自分と同じものを掛け算して 1 周期 2ℓ 積分すると 0 になり、自分と違うものを掛け算して 1 周期積分すると 0 になる